Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Zusatzblatt - Musterlösung

Bemerkung: Die Bearbeitung dieses Blattes ist freiwillig. Jedoch sind die Inhalte **klausurrelevant**. Daher wird eine Bearbeitung des Blattes empfohlen! Das Blatt wird in den Plenumsübungen am 22.07. und 29.07. besprochen werden. Ferner wird eine Musterlösung veröffentlicht werden.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $P^{-1}AP$ in Jordan-Normalform ist und geben Sie diese an.

Lösung: In dieser Aufgabe kann man schrittweise vorgehen.

(1) Man berechnet zunächst das charakteristische Polynom der Matrix A. Dieses ist gegeben durch

$$Char.Pol.(A)(x) = (x-2)(x+1)^2.$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind daher 2 (mit algebraischer Vielfachheit 1) und -1 (mit algebraischer Vielfachheit 2).

(2) Da der Eigenwert 2 algebraische Vielfachheit 1 hat, genügt es einen zugehörigen Eigenvektor zu bestimmen. Dieser ist zum Beispiel gegeben durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Da hingegen der Eigenwert -1 algebraische Vielfachheit 2 hat, muss zunächst ein entsprechender Vektor in $\ker(A+1)^2 \setminus \ker(A+1)$ bestimmt werden. Dieser ist zum Beispiel gegeben durch

$$v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet hieraus sodann den entsprechenden Vektor in $\ker(A+1)$. Dieser ist gegeben durch

$$v_2 := (A+1)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden nun die Spalten der Matrix P, die demnach gegeben ist durch

$$P := (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ist die Jordan-Normalform der Matrix A gegeben durch

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{6\times 6}(\mathbb{R}).$$

Lösung: In dieser Aufgabe kann man schrittweise vorgehen.

(1) Man berechnet zunächst das charakteristische Polynom der Matrix A. Dieses ist gegeben durch

$$Char.Pol.(A)(x) = (x-2)^6.$$

Der (einzige) Eigenwert der Matrix A ist daher 2 (mit algebraischer Vielfachheit 6). Folglich besteht die Jordan-Normalform der Matrix A aus einem einzigen Jordanblock der Größe 6×6 zum Eigenwert 2.

(2) Man bestimmt nun die kleinste Zahl $1 \leq n \leq 6$ sodass $\ker(A - 2I_6)^n = \ker(A - 2I_6)^{n+1}$ gilt.

(i) Man berechnet

$$A - 2I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folgert $\dim(\ker(A - 2I_6)) = 3$. Folglich besteht der Jordan-Block zum Eigenwert 2 aus 3 Jordan-Kästchen.

(ii) Man berechnet

$$(A - 2I_6)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folgert $\dim(\ker(A - 2I_6)^2) = 5$.

(iii) Man berechnet

$$(A - 2I_6)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folgert $\dim(\ker(A - 2I_6)^2) = 6$.

Aus Dimensionsgründen folgt somit $n = 3$. Daher hat das größte Jordan-Kästchen zum Eigenwert 2 die Größe 3×3.

(3) Die verbleibenden beiden Jordan-Kästchen im Jordan-Block zum Eigenwert 2 müssen somit einmal die Größe 1×1 und einmal die Größe 2×2 aufweisen; um insgesamt eine 6×6 Matrix zu erhalten.

(4) Insgesamt ist die Jordan-Normalform der Matrix A somit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Es sei $(\cdot \mid \cdot)$ das innere Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ und

$$\begin{aligned} v_1 &:= (1,1,1,1), \\ v_2 &:= (1,2,4,5), \\ v_3 &:= (1,-3,-4,-2). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis von $Span(v_1, v_2, v_3)$ bzgl. $(\cdot \mid \cdot)$.

Lösung: In dieser Aufgabe kann man schrittweise vorgehen.

(1) Für $v_1 \neq 0$ berechnet man $||v_1|| = 2$ und erhält

$$y_1 := \frac{1}{||v_1||} v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(2) (i) Man setzt $z_2 := v_2 - (v_2 \mid y_1) y_1 = (-2,-1,1,2)$.
(ii) Für $z_2 \neq 0$ berechnet man $||z_2|| = \sqrt{10}$ und erhält

$$y_2 := \frac{1}{||z_2||} z_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right).$$

(3) (i) Man setzt $z_3 := v_3 - (v_3 \mid y_2) y_2 - (v_3 \mid y_1) y_1 = \left(\frac{16}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-13}{10}, \frac{14}{10}\right)$.
(ii) Für $z_3 \neq 0$ berechnet man $||z_3|| = \frac{\sqrt{910}}{10}$ und erhält

$$y_3 := \frac{1}{||z_3||} z_3 = \left(\frac{16}{\sqrt{910}}, \frac{-17}{\sqrt{910}}, \frac{-13}{\sqrt{910}}, \frac{14}{\sqrt{910}}\right).$$

(4) Eine Orthonormalbasis von $Span(v_1, v_2, v_3)$ bzgl. $(\cdot \mid \cdot)$ ist somit gegeben durch (y_1, y_2, y_3).

Aufgabe 4

Beweisen Sie Folgerung 26.10 I. – IV. sowie Eigenschaft (1) – (6) der transponierten Konjungierten.

Lösung: Es wir zunächst Folgerung 26.10 I. – IV. bewiesen.

(I) Beh Für $f_1, f_2 \in V^*$ definiert $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$ ein inneres Produkt auf V^*.
Bew Es werden die Axiome eines inneren Produktes überprüft:
(i) Für $f_1, f_2 \in V^*$ folgt, da $(\cdot \mid \cdot)$ ein inneres Produkt auf V definiert, schon

$$(f_1 \mid f_2) = (\rho(f_2) \mid \rho(f_1)) = \overline{(\rho(f_1) \mid \rho(f_2))} = \overline{(f_2 \mid f_1)}.$$

(ii) Für $f_1, f_2, g \in V^*$ und $c_1, c_2 \in K$ folgt, da $(\cdot \mid \cdot)$ ein inneres Produkt auf V definiert (vgl. Definition 25.0 und Bemerkung 25.1) und den Eigenschaften von ρ (vgl. Satz 26.9), schon

$$\begin{aligned} (c_1 f_1 + c_2 f_2 \mid g) &= (\rho(g) \mid \rho(c_1 f_1 + c_2 f_2)) = (\rho(g) \mid \overline{c_1}\rho(f_1) + \overline{c_2}\rho(f_2)) \\ &= c_1(\rho(g) \mid \rho(f_1)) + c_2(\rho(g) \mid \rho(f_2)) \\ &= c_1(f_1 \mid g) + c_2(f_2 \mid g). \end{aligned}$$

(iii) Für $f \in V^*$ folgt, da $(\cdot \mid \cdot)$ ein inneres Produkt auf V definiert, schon

$$(f \mid f) = (\rho(f) \mid \rho(f)) \geq 0,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\rho(f) = 0$ erfüllt ist. Da ρ injektiv ist (vgl. Satz 26.9) ist $\rho(f) = 0$ ferner genau dann erfüllt, wenn $f = 0$ gilt.

(II) Beh Sei $\mathcal{X} := \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V, dann existiert eine Basis $\mathcal{Y} := \{y_1, \ldots, y_n\}$ von V sodass $(x_i \mid y_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$.
Bew Für $i = 1, \ldots, n$ setze $W_i := Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^\perp$. Für $i = 1$ wähle $z_1 \in W_1$. Für $i > 1$ wähle ferner iterativ $z_i \in W_i \backslash Span(z_1, \ldots, z_{i-1})$. Dann gilt $(z_i \mid x_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Dies erlaubt es $y_i := \frac{1}{(z_i \mid x_i)} z_i$ für $i = 1, \ldots, n$ zu setzen. Es bleibt nun noch zu prüfen, ob $\mathcal{Y} := \{y_1, \ldots, y_n\}$ die geforderten Eigenschaften erfüllt.

(i) *Linear unabhängig*: Seien $c_1, \ldots, c_n \in K$ derart, dass $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$, dann gilt insbesondere

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{1}{(z_i \mid x_i)} z_i.$$

Nach Konstruktion liegt z_n nicht in $Span(z_1, \ldots, z_{n-1})$. Es folgt daher $c_n \frac{1}{(z_n|x_n)} = 0$ und damit insbesondere $c_n = 0$. Analog folgt iterativ $c_{n-1} = \ldots = c_1 = 0$.

(ii) *Basis von V*: Da $\mathcal{Y}$ maximal linear unabhängig in dem n-dimensionalen Vektorraum V ist, ist $\mathcal{Y}$ somit insbesondere eine Basis von V.

(iii) *Kronecker-Delta-Beziehung*: Sei $1 \leq i, j \leq n$.
Falls $i \neq j$, dann folgt nach Konstruktion $(x_i \mid z_j) = 0$, da $z_j \in W_i^{\perp}$. Daher gilt

$$(x_i \mid y_j) = \left(x_i \mid \frac{1}{(z_j \mid x_j)} z_j \right) = \overline{\frac{1}{(z_j \mid x_j)}} (x_i \mid z_j) = 0.$$

Falls hingegen $i = j$ der Fall ist, dann gilt

$$\begin{aligned} (x_i \mid y_i) &= \left(x_i \mid \frac{1}{(z_i \mid x_i)} z_i \right) = \overline{\frac{1}{(z_i \mid x_i)}} (x_i \mid z_i) = \frac{1}{\overline{(z_i \mid x_i)}} (x_i \mid z_i) \\ &= \frac{1}{(x_i \mid z_i)} (x_i \mid z_i) = 1. \end{aligned}$$

(III) <u>Beh</u> Es gilt $\rho(W^0) = W^{\perp}$.
<u>Bew</u> ($\subseteq$) Sei $f \in W^0$ und setze $v := \rho(f)$, dann gilt für beliebig aber festes $w \in W$ schon

$$(v \mid w) = (\rho(f) \mid w) = \overline{(w \mid \rho(f))} = \overline{f(w)} = 0.$$

Dies zeigt $\rho(f) = v \in W^{\perp}$.
($\supseteq$) Sei $v \in W^{\perp}$ und definiere $f \in V^*$ durch $f(x) := (x \mid v)$. Dann gilt für beliebig aber festes $w \in W$ schon $(w \mid \rho(f)) = f(w) = (w \mid v) = \overline{(v \mid w)} = 0$. Dies zeigt $f \in W^0$ und $v = \rho(f)$. Insgesamt also $v = \rho(f) \in \rho(W^0)$.

(IV) <u>Beh</u> Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und definiere T^* durch $(T(x) \mid y) := (x \mid T^*(y))$ für alle $x \in V$, dann gilt $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$.
<u>Bew</u> Für $x, y \in V$ und $c \in K$ gilt für alle $v \in V$ schon

$$\begin{aligned} (v \mid T^*(x + cy)) &= (T(v) \mid x + cy) = (T(v) \mid x) + \overline{c}(T(v) \mid y) \\ &= (v \mid T^*(x)) + \overline{c}(v \mid T^*(y)) = (v \mid T^*(x) + cT^*(y)). \end{aligned}$$

Es folgt $T^*(x + cy) = T^*(x) + cT^*(y)$.

Es verbleibt nun die Eigenschaften (1) – (6) der transponierten Konjungierten zu zeigen:

(1) <u>Beh</u> Für $c \in K$ gilt $(cT)^* = \overline{c}T^*$.
<u>Bew</u> Für $x, y \in V$ beliebig aber fest folgt aus den Eigenschaften des inneren Produktes schon

$$((cT)(x) \mid y) = (cT(x) \mid y) = c(T(x) \mid y) = c(x \mid T^*(y)) = (x \mid \overline{c}T^*(y)).$$

Dies zeigt $(cT)^*(x) = \overline{c}T^*(x)$ für alle $x \in V$.

(2) <u>Beh</u> In den Notationen von (II) sei $A := [T]_{\mathcal{X}}$, dann gilt $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} =: A^*$.
<u>Bew</u> Sei $B := (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} := [T^*]_{\mathcal{Y}}$, dann gilt für $i, j = 1, \ldots, n$ nach (II) schon

$$(T^*(y_j) \mid x_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} y_k \mid x_i \right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} (y_k \mid x_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \delta_{ik} = b_{ij}.$$

Andererseits gilt aber auch

$$(T^*(y_j) \mid x_i) = (y_j \mid T(x_i)) = \left(y_j \mid \sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} (y_j \mid x_i) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} \delta_{jk} = \overline{a_{ji}}.$$

Es folgt aus der Eindeutigkeit von T^* somit $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

(3) <u>Beh</u> In den Notationen von (II) gilt $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.
<u>Bew</u> Nach (2) und den bekannten Determinanten-Eigenschaften gilt

$$\det(A^*) = \det(\overline{A^t}) = \overline{\det(A^t)} = \overline{\det(A)}.$$

(4) Beh In den Notationen von (II) sind die Eigenwerte von A^* die Konjungierten der Eigenwerte von A.
Bew Nach (2), den Eigenschaften von Determinanten und des charakteristischen Polynoms gilt

$$\begin{aligned} Char.Pol.(A^*)(x) &= \det(xI_n - \overline{A^t}) = \det(\overline{\overline{x}I_n^t - A^t}) = \overline{\det((\overline{x}I_n - A)^t)} \\ &= \overline{\det(\overline{x}I_n - A)} = \overline{Char.Pol.(A)(\overline{x})}. \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte von A^* genau den Nullstellen von $Char.Pol.(A^*)(x) = \overline{Char.Pol.(A)(\overline{x})}$ entsprechen, sind diese folglich genau durch die konjungierten Eigenwerte von A gegeben.

(5) Beh Für $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$ gilt $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.
Bew In den Notationen von (II) setze $A := [T_1T_2]_\mathcal{X}$, $A_1 := [T_1]_\mathcal{X}$ und $A_2 := [T_2]_\mathcal{X}$. Nach (2) gilt

$$\begin{aligned} [(T_1T_2)^*]_\mathcal{Y} &= A^* = \overline{A^t} = \overline{[T_1T_2]_\mathcal{X}^t} = \overline{([T_1]_\mathcal{X}[T_2]_\mathcal{X})^t} = \overline{(A_1A_2)^t} = \overline{A_2^tA_1^t} \\ &= \overline{A_2^t} \cdot \overline{A_1^t} = A_2^*A_1^* = [T_2^*]_\mathcal{Y}[T_1^*]_\mathcal{Y}. \end{aligned}$$

(6) Beh Für $T \in \mathcal{L}(V, V)$ gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
Bew In den Notationen von (II) setze $A := [T^{-1}]_\mathcal{X}$ und $B := [T]_\mathcal{X}$. Nach (2) gilt

$$\begin{aligned} [(T^{-1})^*]_\mathcal{Y} &= A^* = \overline{A^t} = (\overline{A})^t = (\overline{[T^{-1}]_\mathcal{X}})^t = (\overline{[T]_\mathcal{X}^{-1}})^t = (\overline{B^{-1}})^t \\ &= (\overline{B^t})^{-1} = (B^*)^{-1} = [T^*]_\mathcal{Y}^{-1} = [(T^*)^{-1}]_\mathcal{Y}. \end{aligned}$$